

# 异质多智能体系统在固定拓扑下的分组一致性

闻国光,黄俊,于玉洁

(北京交通大学理学院,北京 100044)

**摘要:**研究了异质多智能体系统的分组一致性,针对固定通信拓扑情况,提出了一种基于邻接信息的分布式控制协议,并通过李雅普诺夫理论,推导出异质多智能体系统实现分组一致性的充分条件.最后利用数值仿真验证了理论分析的正确性.

**关键词:**异质多智能体系统;分组一致性;李雅普诺夫理论

**中图分类号:**O175 **文献标志码:**A

## Group consensus of heterogeneous multi-agent systems under fixed and switching topology

WEN Guoguang, HUANG Jun, YU Yujie

(School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:**In this paper, we investigate group consensus problem for heterogeneous multi-agent systems with fixed undirected topologies. We first propose a class of distributed control protocol for achieving the group consensus of heterogeneous multi-agent systems by using the neighbors' information. Then according to the Lyapunov theory, some corresponding sufficient conditions are obtained to guarantee the achievement of group consensus. Finally, numerical simulations are given to verify the theoretical analysis. The expected results of this project will provide a theory guarantee for that heterogeneous multi-agent systems could be widely applied in the fields of mobile autonomous robots, unmanned aerial vehicles, intelligent transportation, modern medical treatment, search-and-rescue operations and surveillance, and so on.

**Key words:**heterogeneous multi-agent systems;group consensus;lyapunov theory

近年来,由于多智能体系统在生物系统、机器人编队、传感器网络、无人驾驶飞行器编队、水下行驶器和群体决策问题等方面的广泛应用,而越来越受到来自控制科学、数学、生物学、计算机科学等领域学者的关注.目前,在多智能体系统协调控制的研究中,一些研究课题已经取得了令人鼓舞的结果,例如:群集控制、蜂拥控制、一致性控制、聚集控制、区域覆盖、编队控制等.其中,多智能体系统的一致性控制问题可以描述为:通过对邻居智能体的局部信息设计分布式控制策略,使得智能体系统中某些重

要的状态量随着时间的变化最终趋于一致.可以说一致性问题是多智能体系统协调控制一个重要的基本问题.

2004年,Olfati-Saber和Murray<sup>[1]</sup>给出了研究连续时间一阶多智能体系统一致性控制问题的一个系统框架.在他们的模型中,每个智能体的动力学由一阶积分器来描述: $\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ ,其中, $x_i$ 和 $u_i$ 分别是智能体的位置和速度.2005年,Ren等进一步研究了一阶连续和离散多智能体系统的一致性,证明了如果存在一系列有界的

时间区间,使得在每个区间内智能体间的通信拓扑图包含有向生成树,那么一阶多智能体系统能够达到一致性.与此同时,Moreau等<sup>[2]</sup>考虑了一阶离散非线性多智能体系统的一致性控制问题,并得到了一系列实现一阶离散非线性多智能体系统一致性的条件.2007年,Lin等<sup>[3]</sup>对一阶连续非线性多智能体系统的一致性控制问题进行了研究.随着这个话题的发展,人们得到了大量新的关于带有不同模型和控制策略的一阶多智能体系统的结果.在现实中,考虑到许多系统的运动需要用位置和速度来共同刻画,二阶多智能体系统一致性控制被广泛研究.Ren等<sup>[4]</sup>以及Xie等<sup>[5]</sup>研究了二阶多智能体系统的一致性控制问题,并分别给出了一些具有固定通信拓扑和切换通信拓扑结构的多智能体系统实现一致性的条件.最近,在文献[6]中,作者研究了带有采样信息的二阶多智能体系统一致性问题.

现有的关于多智能系统一致性的研究成果主要是基于同质多智能体系统建立的,即假设每个子系统具有相同的动力学.然而,在实际工程应用中,当不同种类的智能体分享共同目标时,由于外界影响或交流条件的限制,发生耦合的每个智能体的动力学系统可能不同.此时,采用异质动力学模型所模拟的带有不同特性和能力的多机器人网络在现实世界中具有更强的应用性.目前,异质多智能体系统一致性的研究文献,主要是考虑一阶系统和二阶系统的混合<sup>[7-8]</sup>.文献[9]通过应用幂积分方法和李雅普诺夫理论,针对由一阶和二阶智能体组成的异质多智能体系统的一致性提出了两种有限时间一致性算法.在文献[10]中,Zheng等研究了由一阶和二阶智能体组成的混合系统的一致性问题,而以上有关异质多智能体系统的研究都是异一致性.

随着研究的深入,我们发现分组一致性的适用范围更广,更具研究意义.对于由多个小组构成的复杂网络,分组一致性意味着每个组的智能体可以达到一致性,而不同组收敛到不同的值.事实上,分组一致性更加符合自然和人类社会,因为在一些现实的情况下,比如细菌克隆模式的构造、个人意见的簇状构造会根据环境、实际情况、协作任务甚至时间一直变化<sup>[11-12]</sup>.在入度平衡的假设下,Yu等<sup>[13]</sup>利用线性矩阵不等式给出了在固定拓扑下保证一致性的充分条件.通过在分组协议中应用笛卡尔坐标,Xie等<sup>[14]</sup>对于时间连续的多智能体系统建立了实现分组一致性的充要条件.

现有的关于多智能体系统的文献中,或者考虑异质多智能体系统一致性,或者考虑同质分组一致

性.而关于异质多智能体系统分组一致性方面研究还较少.然而,研究具有异质多智能体系统的分组一致性控制具有现实意义和理论意义.因此,本文作者研究异质多智能体系统,针对固定通信拓扑的情况,提出了一种基于邻居信息的分组一致性控制协议,并通过稳定性理论等分析方法,推导出了系统实现分组一致性的充分条件,最后使用数值仿真验证了理论分析的正确性.该研究将会对异质多智能体系统分组一致性控制理论在多机器人合作控制、交通车辆控制、无人飞机编队,智能交通、现代医疗、勘探、营救、以及网络资源分配等实际问题的应用提供进一步的理论基础和技术支持.

## 1 图论和问题描述

### 1.1 图论基础

在一个多智能体网络中,假设每个多智能体是一个质点,由这些多智能体构成一个无向图,图中的每条边代表每个多智能体之间的信息交流.每个智能体根据从它的邻接智能体接受的信息来更新自身的状态.设 $G=(\epsilon, V, \mathbf{A})$ 是一个加权有向图,节点集合为 $V=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ,边集合 $\epsilon \subseteq V \times V$ ,边 $e_{ij}=(v_i, v_j) \in \epsilon$ 意味着节点 $v_j$ 能从节点 $v_i$ 接收信息. $\mathbf{A}$ 表示加权有向图的邻接矩阵.在 $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{n \times n}$ 中, $a_{ij}$ 是大于等于0的常数,若 $e_{ji} \in \epsilon$ 则 $a_{ij} > 0$ ;若 $e_{ji} \notin \epsilon$ 则 $a_{ij} = 0$ .若在图 $G$ 对应的邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 中,有 $a_{ij} = a_{ji}$ 则称这个图 $G$ 是无向图.在有向图 $G$ 中,若任意两个不同的节点之间都有一条路,则称这个有向图 $G$ 是强连通的.在无向图 $G$ 中,连通也叫做强连通.在有向图 $G$ 中,如果存在一个节点和其它所有节点之间至少有一条路,则称这个有向图 $G$ 有有向生成树.对于给定的多智能体系统,若用有向图 $G$ 来模拟所有智能体之间的信息交流,那么称 $G$ 为多智能体系统的通信拓扑.用 $N_i = \{v_j \mid e_{ji} \in \epsilon\}$ 来表示节点 $v_i$ 的邻接点集合.此外,定义图 $G$ 的拉普拉斯矩阵为 $\mathbf{L}=[l_{ij}]_{n \times n}$ ,

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & i \neq j \\ \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

结点 $i$ 的度定义为 $deg(i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}$ .

### 1.2 系统模型

考虑由 $m$ 个二阶智能体和 $n-m$ 个一阶智能体构成的异质多智能体系统.二阶智能体系统表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \end{cases} \quad i=1,2,\dots,m \quad (1)$$

其中  $x_i(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $v_i(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $u_i(t) \in \mathbf{R}^n$  分别表示第  $i$  个智能体位置,速度,控制输入.此外,一阶智能体的动力学系统表示如下

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = m+1, m+2, \dots, n \quad (2)$$

**定义 1** 对于任意的初始状态值  $x_i(0)$  和  $v_i(0)$ ,若异质多智能体系统满足以下条件

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \text{若 } \sigma_i = \sigma_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall \sigma_i, \sigma_j \in \{1, 2, \dots, k\}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| \neq 0, \text{若 } \sigma_i \neq \sigma_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall \sigma_i, \sigma_j \in \{1, 2, \dots, k\}; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t)\| = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases} \quad (3)$$

则称其逐渐达到  $k$  组一致性( $k \geq 2$ ).

## 2 预备知识

**注 1** 为了方便起见,本文都是基于一维空间,即  $x_i(t), v_i(t), u_i(t) \in \mathbf{R}$ .然而,我们在一维空间里得到的所有结果都可以通过克罗内克积(Kronecker product)推广到  $n$  维空间.

**引理 1**<sup>[15]</sup> 考虑一个形式为

$$\dot{x} = f(x) \quad (4)$$

的自治系统,  $f$  是连续的,令  $V(x): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是一阶偏导连续的标量函数.假设

1) 当  $\|x\| \rightarrow \infty, V(x) \rightarrow \infty$

2)  $\forall x \in \mathbf{R}^n, \dot{V}(x) \leq 0$

令  $S$  是  $\mathbf{R}^n$  中使  $\dot{V}(x) = 0$  的点的集合,  $M$  是  $S$  中最大的不变子集,则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{R}^n$  中所有解  $x(t)$  趋近于  $M$ .

## 3 异质多智能体系统的分组一致性

定义控制器如下:

$$u_i = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) - k_1 v_i + \\ \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{\sigma_j}, i = 1, 2, \dots, m \\ k_2 \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) + \\ k_2 \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{\sigma_j}, i = m+1, \dots, n \end{cases} \quad (5)$$

其中  $k_1 > 0, k_2 > 0$  是控制参数.

在这部分中,我们将讨论异质多智能体系统在固定拓扑下的分组一致性.

**定理 1** 设智能体间的通信拓扑图是无向连通的,由式(1)和式(2)组成的异质多智能体系统在控制器(5)下可以达分组一致性.

其中  $x_i(t) \in \mathbf{R}^n, u_i(t) \in \mathbf{R}^n$  分别表示第  $i$  个智能体位置,控制输入.

设在一个由  $k$  组( $k \geq 2$ )构成的多智能体系统中,如果智能体属于第  $t$  个组,则记  $\sigma_i = t$ ,令  $x_{\sigma_i}$  是对智能体进行分组的常数,且当  $\sigma_i = \sigma_j$  时,有  $x_{\sigma_i} = x_{\sigma_j}$ ,当  $\sigma_i \neq \sigma_j$  时,有  $x_{\sigma_i} \neq x_{\sigma_j}$ .

**证明** 根据控制器(5),可以将式(1)~(2)改写成:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) - k_1 v_i + \\ \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{\sigma_j}, i = 1, 2, \dots, m \\ \dot{x}_i = k_2 \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) + \\ k_2 \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{\sigma_j}, i = m+1, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

令  $e_i = x_i - x_{\sigma_i}, i = 1, 2, \dots, n$ ,则有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) + \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{\sigma_j} = \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^n l_{ij} x_{\sigma_j} + l_{ii} x_{\sigma_i} = \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_{\sigma_j} + \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_{\sigma_i} = \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij}((x_j - x_{\sigma_j}) - (x_i - x_{\sigma_i})) = \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(e_j - e_i)$$

根据  $\sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i) + \sum_{j=1}^n l_{ij} x_{\sigma_j} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_j - e_i)$

和  $e_i = x_i - x_{\sigma_i}$ ,系统(6)可以写作

$$\begin{cases} \dot{e}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_j - e_i) - k_1 v_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \dot{e}_i = k_2 \sum_{j=1}^n a_{ij}(e_j - e_i), i = m+1, m+2, \dots, n \end{cases} \quad (7)$$

选择李雅普诺夫函数如下:

$$V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{(e_j - e_i)^2}{2} + \sum_{i=1}^m v_i^2$$

其中  $V$  是一个正函数.对  $V$  求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) (\dot{e}_j - \dot{e}_i) + 2 \sum_{i=1}^m v_i \dot{v}_i = \\ & -2k_1 \sum_{i=1}^m v_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) v_i + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (e_j - e_i) v_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=m+1}^n a_{ij} (e_j - e_i) \dot{e}_j - \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) v_i - \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) \dot{e}_i \end{aligned} \quad (8)$$

因为通信拓扑图是无向的,即邻接矩阵  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$  是对称的,我们可以得到

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} (e_j - e_i) v_j = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) v_i, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=m+1}^n a_{ij} (e_j - e_i) \dot{e}_j = - \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) \dot{e}_i. \quad (10)$$

将式(9)和式(10)代入式(8),得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -2k_1 \sum_{i=1}^m v_i^2 - 2 \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) \dot{e}_i \\ = & -2k_1 \sum_{i=1}^m v_i^2 - \frac{2}{k_2} \sum_{i=m+1}^n \dot{e}_i^2 \leq 0. \end{aligned}$$

然后利用拉萨尔不变集原理.设  $S = \{(e_1, e_2, \dots, e_n, v_1, \dots, v_m) \mid \dot{V} = 0\}$ ,  $M$  是  $S$  中最大的不变子集.当  $\dot{V} = 0$  时,有

$$\begin{cases} v_i = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ \dot{e}_i = 0, & i = m + 1, m + 2, \dots, n \end{cases} \quad (11)$$

所以从式(7)和式(11)中可得  $M$  如下

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ v_i = 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (12)$$

从式(12)中可得

$$\sum_{i=1}^n e_i \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i) = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n e_j \sum_{i=1}^n a_{ij} (e_i - e_j) = 0 \quad (14)$$

两式相加得

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (e_j - e_i)^2 = 0 \quad (15)$$

基于之前提到的性质和式(15),最大不变子集

$M$  化为如下形式

$$\begin{cases} e_i = e_j, & i, j = 1, 2, \dots, n \\ v_i = 0, & i = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (16)$$

将  $e_i = x_i - x_{\sigma_i}$  代入式(16),可以得到

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t)\| = 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_{\sigma_i}(t)\| = 0, & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (17)$$

综上所述,定理1得证.

### 4 仿真模拟

在本节中,我们将通过仿真来验证其理论结果.考虑一个由3个具有二阶动力学的智能体(智能体1、2、3)和4个具有一阶动力学的智能体(智能体4、5、6、7)构成的异质多智能体系统,它们的通信拓扑见图1.我们将智能体分为两组  $G_1$  和  $G_2$ ,智能体1、2、4、5属于  $G_1$  组,智能体3、6、7属于  $G_2$  组.从图1可以看出通信拓扑是无向连通的.为了简化计算,我们假设邻接矩阵中的权重都为1.令  $k_1 = 3, k_2 = 1$ ,记  $t$  为系统运行的时间,智能体的初始位置和速度是随机的,取系统初始速度为  $v^T(0) = [0.8, -0.4, 0.5]^T$ ,初始位移为  $x^T(0) = [0, 1.2, 0.3, 2, 0.8, 3.8, 1.7]^T$ ,图2显示了所有智能体的状态轨迹,从图2的仿真结果中可以看出系统能够渐进收敛达到分组一致性,验证了定理的正确性.

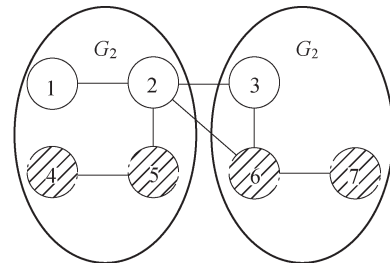
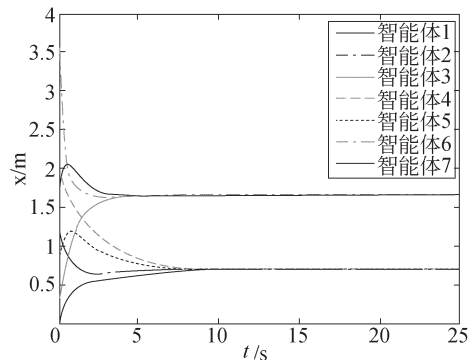


图1 异质多智能体系统的固定拓扑图

Fig.1 The fixed topology of heterogeneous multi-agent systems



(a) 智能体的位移

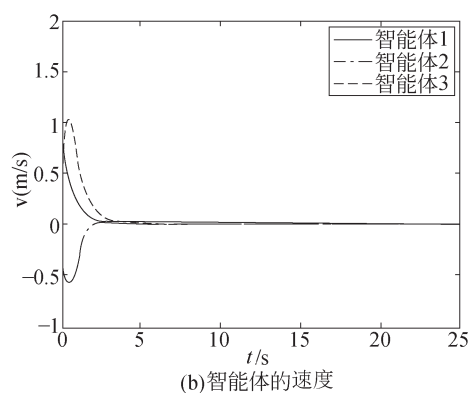


图2 异质多智能体系统在固定拓扑图下的轨迹

Fig.2 Trajectory of heterogeneous multi-agent systems under fixed topology

## 5 结论

本文研究异质多智能体系统在固定无向通信拓扑下的分组一致性问题.文中提出一个基于邻居信息的分布式分组一致性的控制协议,并给出了使系统达到分组一致性的充分条件.最后用数值仿真验证了理论的正确性.未来,我们将进一步考虑在切换拓扑下,异质多智能体系统的分组一致性问题.

### 参考文献(References):

- [1] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9):1520—1533.
- [2] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5):655—661.
- [3] LIN Z, FRANCIS B, MAGGIORE M. State agreement for continuous-time coupled nonlinear systems[J]. *Siam Journal on Control & Optimization*, 2007, 46(1):288—307.
- [4] REN W, ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11):1002—1033.
- [5] XIE G, WANG L. Consensus control for a class of networks of dynamic agents[J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11):941—959.
- [6] YU W, ZHOU L, YU X, et al. Consensus in multi-agent systems with second-order dynamics and sampled data[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2013, 9(4):2137—2146.
- [7] ZHENG Y, WANG L. Finite-time consensus of heterogeneous multi-agent systems with and without velocity measurements[J]. *International Journal of Control*, 2012, 61(7):906—914.
- [8] FENG Y, XU S, LEWIS F L, et al. Consensus of heterogeneous first- and second-order multi-agent systems with directed communication topologies[J]. *International Journal of Robust & Nonlinear Control*, 2013, 25(3):362—375.
- [9] LIU C L, LIU F. Stationary consensus of heterogeneous multi-agent systems with bounded communication delays[J]. *Automatica*, 2011, 47(9):2130—2133.
- [10] ZHENG Y, ZHU Y, WANG L. Consensus of heterogeneous multi-agent systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2011, 5(16):1881—1888.
- [11] YOU S K, KWON D H, PARK Y, et al. Collective behaviors of two-component swarms[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2009, 261(3):494—500.
- [12] BLONDEL V D, HENDRICKX J M, TSITSIKLIS J N. On Krause's multi-agent consensus model with state-dependent connectivity[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(11):2586—2597.
- [13] YU J, WANG L. Group consensus of multi-agent systems with undirected communication graphs[C]// *Asian Control Conference*, Hong Kong, 2009:105—110.
- [14] XIE D, LIU Q, LYU L, et al. Necessary and sufficient condition for the group consensus of multi-agent systems[J]. *Applied Mathematics & Computation*, 2014, 243:870—878.
- [15] AEYELS D. Asymptotic stability of nonautonomous systems by Liapunov's direct method[J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 25(4):273—280.